モデル圏入門

秋桜

Outline

Outline

Homotopy theory

ホモトピーとは, 位相空間や連続写像を連続的に変形するということを定式化した概念であり, 位相空間や連続写像から代数的な対象と準同型写像を与える.

ホモトピー論とは, 1930 年代に Poincare や Hopf などの手により発展しはじめたホモトピーを用いて, 位相空間や連続写像を研究する理論である.

Daniel Gray Quillen

Daniel Gray Quillen は 1964 年に Harvard 大学で Raoul Bott のもとで偏微分方程式に関する論文 [Qui64] を書き, 博士号を取得し, Massachusetts 工科大学に移り, Daniel Marinus Kan の影響を受けて代数的位相幾何学の研究を始めた.

そして, 博士号を取得した 3 年後"Homotopical algebra" [Qui67] でモデル圏を導入した. また, 高次代数的 K 理論に関する功績により, 1975 年に Frank Nelson Cole 賞を受賞し, 1978 年に Fields 賞を受賞した.

Model category

モデル圏は 1967 年に Daniel Gray Quillen によって"Homotopical algebra"[Qui67] で導入された weak equivalence, fibration, cofibration という射をもつ圏で良い条件をみたすものである.

モデル圏の導入により, 代数的位相幾何学は様々な分野との関わりをもつようになった. 実際, Vladimir Voevodsky はモデル圏の理論を用いて Milnor 予想を証明し, 2002 年に Fields 賞を受賞した.

特に simplicial set や導来圏や $(\infty, 1)$-category などはモデル圏と深く関わっている.

Simplicial set

simplicial set は 1950 年に Samuel Eilenberg と Joseph Abraham Zilber によって [EZ50] で位相空間の組合せ論的なモデルとして導入された正の整数で次数付けられた simplex と呼ばれる集合と face map と degeneracy map と呼ばれる写像で simplicial identity をみたすものである.

1950 年代では, degeneracy map のない simplicial set は semi-simplicial complex と呼ばれ, 現在 simplicial set と呼ばれているものは complete semi-simplicial complex や c.s.s.complex と呼ばれていた.

現代では, simplex category 上の前層として定義されることも多い.

Derived category

導来圏は 1967 年に Alexander Grothendieck の学生の Jean-Louis Verdier によって [Vel67] で導入されたアーベル圏上の cochain complex の圏のホモトピー圏を擬同型射のなす積閉系で局所化したものである.

導来圏は代数幾何でよく用いられる. 他にも D-加群の理論や超局所解析などでも欠かせない概念であり, 現代では様々な数学の分野で用いられる. さらに, 近年はミラー対称性など物理に近い分野でも重要になっている.

$(\infty, 1)$-category

$(\infty, 1)$-category には様々なモデルがあるが, 今回は quasi-category を指すことにする.

quasi-category は 1973 年に Michael Boardman と Rainer Vogt によって [BV73] で導入された良い性質をみたす simplicial set であり, Kan complex と圏の nerve の同時一般化である.

[BV73] では現在 quasi-category と呼ばれているものは weak Kan complex と呼ばれていた.

Outline

Definition of simplicial set

集合と写像のなす圏を **Set** と表す.

Definition 2.1 (simplex category, simplicial set)

$n \in \mathbf{N}$ に対し, $[n] := \{0, 1, 2, \cdots n\}$ を標準的な順序で順序集合とみなす. $n \in \mathbf{N}$ に対して定まる順序集合 $[n]$ と順序を保つ写像のなす圏を simplex category といい, Δ と表す. また, 関手 $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を simplicial set という.

つまり, simplicial set は Δ 上の前層である. simplicial set の圏を **sSet** と表し, 米田埋め込みを $\mathbf{y}\colon \Delta \to \mathbf{sSet}$ と表す.

simplicial set は様々な良い性質を持つが, Quillen は次の 2 つの性質に目をつけた.

Definition of Kan complex

1 つ目は一般の simplicial set では simplicial homotopy はあまり良く振る舞わないのに対して Kan が [Kan56] で導入した Kan complex では良く振る舞うという点である.

Definition 2.2 (Kan complex)

K は simplicial set であり, 任意の $n \in \mathbf{N}$ と任意の $0 \leq i \leq n$ と任意の simplicial map $f\colon \Lambda^n_i \to K$ に対し, 以下の図式を可換にする simplicial map $\widetilde{f}\colon \Delta^n \to K$ が存在するとき Kan complex であるという.

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & K \\ \Delta^n \arrow[ur, "\exists \widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Kan complex and injective module

Kan complex の定義は環上の加群の概念である入射加群の定義に類似している.

Definition 2.3 (入射加群)

R を可換環とする. M は R-加群であり, 任意の R-加群 N, L と任意の単射準同型写像 $i\colon N \to L$ と任意の準同型写像 $f\colon N \to M$ に対し, 以下の図式を可換にする準同型写像 $\widetilde{f}\colon L \to M$ が存在するとき入射加群であるという.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"'] & M \\ L \arrow[ur, "\exists \widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Geometric realization and singular complex

2 つ目は simplicial set と位相空間の関係である.

$[n]$ に対し, 標準 n-単体を対応させる関手 $F\colon \Delta \to \mathbf{Top}$ を考えると普遍随伴より, $\mathbf{y}^{\dagger}F \dashv F^{\dagger}\mathbf{y}$ を得る.

$|-| := \mathbf{y}^{\dagger}F\colon \mathbf{sSet} \to \mathbf{Top}$ を幾何学的実現関手といい,
$Sing := F^{\dagger}\mathbf{y}\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{sSet}$ を singular functor という.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{sSet} \arrow[dr, "|-|"] & \\
\Delta \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathrm{Top} \arrow[ul, "Sing"] \arrow[ul, phantom, "\dashv"]
\end{tikzcd}
$$

Geometric realization and singular complex

Milnor は任意の Kan complex に対し, $K \to Sing\ |K|$ が simplicial homotopy 同値写像であることと任意の CW 複体に対し, $|Sing\ X| \to X$ がホモトピー同値写像であることを示した. これにより, simplicial set のホモトピー論と位相空間のホモトピー論はほとんど同じであることがわかる.

Quillen は Gabriel と Zisman が [GZ67] で定義した圏の局所化にも目をつけた.

Localization

圏の局所化とは積閉系の形式的な逆射を付け加えるというものである.

自然なアイデアとして圏の射と積閉系の射を形式的に逆にした射からできる quiver の自由圏を適切に割れば良いというのが思い浮かぶが, この方法だと射が具体的にどういう形をしているかわからない. そこで Gabriel と Zisman は射が具体的に記述できる条件を考えたのである.

圏の局所化は導来圏の構成にも欠かせない.

Derived category

アーベル圏 $\mathscr{A}$ の cochain complex の圏を $C(\mathscr{A})$ と表し, そのホモトピー圏を $K(\mathscr{A})$ と表す.

Definition 2.4 (擬同型射)

アーベル圏上の cochain complex の射 $f\colon A \to B$ は任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対し, コホモロジー上の同型射 $H^n(f)\colon H^n(B) \to H^n(A)$ を誘導するとき擬同型射という.

擬同型射は積閉系を定める.

Definition 2.5 (導来圏)

アーベル圏 $\mathscr{A}$ の導来圏とは $K(\mathscr{A})$ を擬同型射のなす積閉系で局所化した圏である.

Replacement

今まで simplicial set と位相空間とアーベル圏の導来圏をみてきたが Quillen は次の 3 点が類似していることに気付いた.

simplicial set は *Kan complex* に取りかえられる.

位相空間は *CW* 近似により *CW* 複体に取りかえられる.

アーベル圏の対象は入射分解や射影分解により入射的対象や射影的対象に取りかえられる.

Fibration and cofibration

Quillen は「取りかえる」ことに注目したが, これを対象ではなく射の性質で特徴付けようとした. そこで fibration と cofibration に目を付けた.

Definition 2.6 (Serre fibration)

位相空間の間の連続写像 $p\colon E \to B$ が CW 複体 X と可換図式

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times [0,1] \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd}$$

に対し, 連続写像 $\widetilde{H}\colon X \times [0,1] \to E$ で図式

Fibration and cofibration

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times [0,1] \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "\exists \widetilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

を可換にするものが存在するとき Serre fibration という.

X を CW 複体ではなく任意の位相空間に変えたものを Hurewicz fibration という.

Fibration and cofibration

fibration の双対概念として cofibration がある.

Definition 2.7 (cofibration)

位相空間の間の連続写像 $i\colon A \to X$ が可換図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "H"] \arrow[d, "i"'] & Y^{[0,1]} \arrow[d, "\mathrm{ev}_0"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

に対し, 連続写像 $\widetilde{H}\colon X \to Y^{[0,1]}$ で図式

Fibration and cofibration

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "H"] \arrow[d, "i"'] & Y^{[0,1]} \arrow[d, "\mathrm{ev}_0"] \\
X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "\exists \widetilde{H}"] & Y
\end{tikzcd}$$

を可換にするものが存在するとき cofibration という．また, $i(A)$ が閉集合のとき closed cofibration という．

ここまでのまとめとして以下が重要である．

「同じ」とみなしたいものがある．

「取りかえたい」ものがある．

Outline

Mor $\mathscr{C}$

モデル圏を定義する準備をする.

圏 $\mathscr{C}$ に対し, $\mathscr{C}$ の射を対象とし, $f\colon A \to B$ と $g\colon C \to D$ に対し, 可換図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "i"'] & D \end{tikzcd}$$

を満たす (h, i) を f から g への射とすることで圏 $\mathrm{Mor}\,\mathscr{C}$ が定まる. また, 関手

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{dom}: & \mathrm{Mor}\,\mathscr{C} & \longrightarrow & \mathscr{C} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & f\colon A \to B & \longmapsto & A \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \mathrm{codom}: & \mathrm{Mor}\,\mathscr{C} & \longrightarrow & \mathscr{C} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & f\colon A \to B & \longmapsto & B \end{array}$$

が存在する.

Retract

Definition 3.1 (レトラクト)

$\mathscr{C}$ を圏とする. 図式

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_A"] & C \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_B"'] & D \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

が可換であるとき, f は g のレトラクトという.

Functorial factorization

Definition 3.2 (Functorial factorization)

$\mathscr{C}$ を圏とする. 2 つの関手 $\alpha, \beta \colon \mathrm{Mor}\,\mathscr{C} \to \mathrm{Mor}\,\mathscr{C}$ が,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dom} \circ \alpha &= \mathrm{dom}, \\
\mathrm{codom} \circ \beta &= \mathrm{codom}, \\
\mathrm{codom} \circ \alpha &= \mathrm{dom} \circ \beta, \\
\forall f \in \mathrm{Mor}\,\mathscr{C},\ f &= \beta(f) \circ \alpha(f)
\end{aligned}
$$

を満たすとき, (α, β) を functorial factorization という.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{dom}(f) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha(f)"'] & & \mathrm{codom}(f) \\
& \mathrm{codom} \circ \alpha(f) = \mathrm{dom} \circ \beta(f) \arrow[ur, "\beta(f)"'] &
\end{tikzcd}
$$

Functorial factorization

特に, 可換図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "v"] \\ C \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd}$$

は可換図式

Functorial factorization

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{dom}\circ\beta(f)=\mathrm{codom}\circ\alpha(f) \arrow[dr, "\beta(f)"] \arrow[ddd, "\mathrm{dom}\circ\beta(u,v)=\mathrm{codom}\circ\alpha(u,v)" description] & \\
A \arrow[ur, "\alpha(f)"] \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "u"'] & & B \arrow[d, "v"] \\
C \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\alpha(g)"'] & & D \\
 & \mathrm{dom}\circ\beta(g)=\mathrm{codom}\circ\alpha(g) \arrow[ur, "\beta(g)"'] &
\end{tikzcd}
$$

を誘導する.

Lift

Definition 3.3 (Lift)

$\mathscr{C}$ を圏とし, f, g を $\mathscr{C}$ の射とする. このとき, 可換図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "p"'] & Y \end{tikzcd}$$

の lift とは, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, X)$ で $i = h \circ f$ と $p = g \circ h$ を満たすものである.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "p"'] \arrow[ur, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

Right lifting property and left lifting property

Definition 3.4 (right lifting property, left lifting property)

$\mathscr{C}$ を圏とし, f, g を $\mathscr{C}$ の射とする．このとき, f が g に対し, left lifting property をもつ．または, g が f に対し, right lifting property をもつとは, 任意の可換図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\forall i"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "\forall p"'] & Y \end{tikzcd}$$

に対し, lift $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, X)$ が存在することである．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\forall i"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "\forall p"'] \arrow[ur, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

Definition of model structure

Definition 3.5 (モデル構造)

$\mathscr{C}$ を圏とする. $\mathscr{C}$ のモデル構造とは, 3 つの $\mathrm{Mor}\,\mathscr{C}$ の部分圏 **W**,**Cof**,**Fib** と 2 つの functorial factorization$(\alpha,\beta),(\gamma,\delta)$ で以下を満たすものである.

2-out-of-3
$\mathscr{C}$ の射 f,g が $\mathrm{codom}\ f = \mathrm{dom}\ g$ を満たすとする. このとき, $f,g,g\circ f$ のうち少なくとも 2 つが **W** に属しているならば, 残りの 1 つも **W** に属している.

Retracts
f,g を $\mathscr{C}$ の射とし, f を g の *retract* とする. このとき, g が **W** に属しているならば f は **W** に属しており, g が **Cof** に属しているならば f は **Cof** に属しており, g が **Fib** に属しているならば f は **Fib** に属している.

Definition of model structure

Lifting

Cof と **W** の両方に属する射 f は **Fib** に属する射 g に対し,*left lifting property* をもち, **Cof** に属する射 f は **Fib** と **W** の両方に属する射 g に対し,*left lifting property* をもつ.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, hook, "f"', "\wr"] & X \arrow[d, two heads, "g"] \\
B \arrow[r] \arrow[ur, "\exists h"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, hook, "f"'] & X \arrow[d, two heads, "g", "\wr"'] \\
B \arrow[r] \arrow[ur, "\exists h"] & Y
\end{tikzcd}
$$

Definition of model structure

Factorization
任意の $\mathscr{C}$ の射 f に対し, $\alpha(f)$ は **Cof** に属する射であり, $\beta(f)$ は **Fib** と **W** の両方に属する射である. また, 任意の $\mathscr{C}$ の射 f に対し, $\gamma(f)$ は **Cof** と **W** の両方に属する射であり, $\delta(f)$ は **Fib** に属する射である.

$$
\begin{tikzcd}
& {} \arrow[dl, hook, "\alpha(f)"'] \arrow[dd, "f"] \arrow[dr, hook, "\gamma(f)", "\sim"'] & \\
{} \arrow[dr, two heads, "\beta(f)"', "\sim"] & & {} \arrow[dl, two heads, "\delta(f)"] \\
& {} &
\end{tikzcd}
$$

Definition of model category

W に属する射を weak equivalence, **Cof** に属する射を cofibration, **Fib** に属する射は fibration, **Cof** と **W** の両方に属する $\mathscr{C}$ の射を trivial cofibration, **Fib** と **W** の両方に属する $\mathscr{C}$ の射を trivial fibration という.[1]

Definition 3.6 (モデル圏)

完備かつ余完備でモデル構造をもつ圏をモデル圏という.

「同じ」とみなしたいものから weak equivalence を導入し,「取りかえたい」ものの射の情報から cofibration と fibration を導入した.

[1]今回はそれぞれ $\xrightarrow{\sim}$, $\hookrightarrow$, $\twoheadrightarrow$, $\overset{\sim}{\hookrightarrow}$, $\overset{\sim}{\twoheadrightarrow}$ で表す.

Cofibrant object and fibrant object

「とりかえたい」ものを射の情報で定めたため, それを対象にうつす.

モデル圏は完備かつ余完備なので始対象 0 と終対象 1 をもつ.

Definition 3.7 (cofibrant object, fibrant object)

始対象からの射 $0 \to A$ が cofibration のとき, A を cofibrant といい, 終対象への射 $B \to 1$ が fibration のとき, B を fibrant という.

Cofibrant replacement functor

$\mathscr{C}$ をモデル圏とする.
始対象からの射 $0 \to A$ の分解により, cofibrant replacement functor と呼ばれる関手 $Q \colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ を得る.
実際, $A \in \mathscr{C}$ に対し, 図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, dotted, "f"] \arrow[dr, hook, "\alpha(f)"'] & & A \\
& Q(A) \arrow[ur, two heads, "\sim", "\beta(f)"'] &
\end{tikzcd}$$

の $Q(A) \in \mathscr{C}$ を対応させ,

Cofibrant replacement functor

$h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ に対し, 可換図式

$$
\begin{tikzcd}
 & Q(A) \arrow[dr, two heads, "\beta(f)", "\sim"'] \arrow[ddd, dash, "Q(h)" description] & \\
0 \arrow[ur, hook, "\alpha(f)"] \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_0"'] & & A \arrow[d, "h"] \\
0 \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, hook, "\sim", "\alpha(g)"'] & & B \\
 & Q(B) \arrow[ur, two heads, "\sim", "\beta(g)"'] &
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

の $Q(h) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q(A), Q(B))$ を対応させれば良い.
また, (1) より, 各成分が tirivial fibration である自然変換 $\beta\colon Q \to \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ を得る.

Fibrant replacement functor

同様に, 終対象への射 $A \to 1$ の分解により, fibrant replacement functor と呼ばれる関手 $R\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ を得る.
実際, $A \in \mathscr{C}$ に対し, 図式

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, dotted, "f"] \arrow[dr, hook, "\sim", "\gamma(f)"'] & & 1 \\
& R(A) \arrow[ur, two heads, "\delta(f)"'] &
\end{tikzcd}$$

の $R(A) \in \mathscr{C}$ を対応させ,

Fibrant replacement functor

$h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ に対し, 図式

$$
\begin{tikzcd}
& R(A) \arrow[dr, two heads, "\delta(f)"] \arrow[ddd, "R(h)" description] & \\
A \arrow[ur, hook, "\gamma(f)", "\sim"'] \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "h"'] & & 1 \arrow[d, "\mathrm{id}_1"] \\
B \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, hook, "\gamma(g)"', "\sim"] & & 1 \\
& R(B) \arrow[ur, two heads, "\delta(g)"'] &
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

の $R(h) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(R(A), R(B))$ を対応させれば良い.
また, (2) より, 各成分が trivial cofibration である自然変換 $\alpha\colon \mathrm{id}_{\mathscr{C}} \to R$ を得る.

Example of model category

Example 3.8 (Top の Quillen モデル構造)

位相空間と連続写像のなす圏 **Top** は weak equivalence を弱ホモトピー同値写像とし, fibration を Serre fibration とし, cofibration を tirivial fibration に対し left lifting property をみたす連続写像と定めるとモデル圏となる.
このモデル構造を Quillen モデル構造という.

Example 3.9 (Top の Strøm モデル構造)

位相空間と連続写像のなす圏 **Top** は weak equivalence をホモトピー同値写像とし, fibration を Hurewicz fibration とし, cofibration を closed cofibration と定めるとモデル圏となる.
このモデル構造を Strøm モデル構造という.

Example of model category

Example 3.10 (sSet の Kan モデル構造)

simplicial set と simplicial map のなす圏 **sSet** は weak equivalence を幾何学的実現関手でうつして弱ホモトピー同値写像になる simplicial map とし, fibration を Kan fibration とし, cofibration を inclusion と定めるとモデル圏となる.
このモデル構造を Kan モデル構造という.

Example 3.11 ($\mathbf{Ch}_{\geq 0}(R)$ のモデル構造)

単位的可換環 R 上の加群の chain complex のなす圏 $\mathbf{Ch}_{\geq 0}(R)$ は weak equivalence を擬同型写像とし, cofibration を任意の $n \geq 0$ に対し, f_n が単射かつ $\mathrm{Coker}\, f_n$ が射影的な chain map とし, fibration を任意の $n \geq 0$ に対し, f_n が全射となる chain map と定めるとモデル圏となる.

Example of cofibrant replacement functor

$\mathbf{Ch}_{\geq 0}(R)$ に Example 3.11 のモデル構造を入れたとき, $(M_n)_n \in \mathbf{Ch}_{\geq 0}(R)$ が cofibrant であることは各 M_n が射影加群ということである.
よって, 単位的可換環 R 上の加群 M を chain complex

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow M$$

とみなして cofibrant replacement functor Q をとると, $Q(M)$ は射影分解である.

Outline

Cylinder object and path object

モデル圏のホモトピーは cylinder object と path object を用いて定義される.

Definition 4.1 (cylinder object)

$\mathscr{C}$ をモデル圏とし, $A \in \mathscr{C}$ とする. $X \in \mathscr{C}$ が余積の普遍性から得られる射 $\mathrm{id}_A \coprod \mathrm{id}_A \colon A \coprod A \to A$ を $A \coprod A \hookrightarrow X \xrightarrow{\sim} A$ と分解するとき, cylinder object という.

Definition 4.2 (path object)

$\mathscr{C}$ をモデル圏とし, $A \in \mathscr{C}$ とする. $X \in \mathscr{C}$ が余積の普遍性から得られる射 $\mathrm{id}_A \times \mathrm{id}_A \colon A \to A \times A$ を $A \xrightarrow{\sim} X \twoheadrightarrow A \times A$ と分解するとき, path object という.

Left homotopy and right homotopy

Definition 4.3 (left homotopy)

$\mathscr{C}$ をモデル圏とし, $f, g\colon A \to B$ を $\mathscr{C}$ の射とする. A の cylinder object X と $\mathscr{C}$ の射 $h\colon X \to B$ が存在し, 以下の図式を可換にするとき, f は g と left homotopic といい, h を f から g への left homotopy という.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "h"] & \\ A \coprod A \arrow[u, hook] \arrow[r, "f \coprod g"'] & B \end{tikzcd}$$

Definition 4.4 (right homotopy)

$\mathscr{C}$ をモデル圏とし, $f, g\colon A \to B$ を $\mathscr{C}$ の射とする. B の path object X と $\mathscr{C}$ の射 $h\colon A \to X$ が存在し, 以下の図式を可換にするとき, f は g と right homotopic といい, h を f から g への right homotopy という.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, two heads] \\ A \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "f \times g"'] & B \times B \end{tikzcd}$$

Homotopy and weak equivalence

domain が cofibrant object で codomain が fibrant object のとき, left homotopy と right homotopy は一致する．このとき, 単に homotopy という．また, cofibrant かつ fibrant な object の間の weak equivalence は homotopy で特徴付けできる．

Proposition 4.5

$\mathscr{C}$ をモデル圏, A, B を $\mathscr{C}$ の cofibrant かつ fibrant な object, $f\colon A \to B$ を $\mathscr{C}$ の射とする．このとき,

f が weak equivalence

$\iff$

$\mathscr{C}$ の射 $g\colon B \to A$ が存在し, $g \circ f$ が id_A と homotopic かつ $f \circ g$ が id_B と homotopic

Homotopy category of model category

Definition 4.6 (homotopy category)

$\mathscr{C}$ をモデル圏とする．このとき, $\mathscr{C}$ の weak equivalence を積閉系とする局所化をホモトピー圏といい, $\mathrm{Ho}(\mathscr{C})$ と表す.

Quillen はモデル圏のホモトピー圏が cofibrant かつ fibrant な object と射のホモトピー類のなす圏と同値であることを示した.

Derived functor

Definition 4.7 (導来関手)

$\mathscr{C}$ をモデル圏, $\mathscr{D}$ を圏, $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ を関手, $\mathrm{Ho}\colon \mathscr{C} \to \mathrm{Ho}(\mathscr{C})$ を局所化関手とする．このとき, Ho に沿った F の右 Kan 拡張を F の左導来関手といい, Ho に沿った F の左 Kan 拡張を F の右導来関手という．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ho}(\mathscr{C}) \arrow[dr, "\mathrm{Ho}^{\ddagger} F"] & \\ \mathscr{C} \arrow[u, "\mathrm{Ho}"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow"] & \mathscr{D} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Ho}(\mathscr{C}) \arrow[dr, "\mathrm{Ho}^{\dagger} F"] & \\ \mathscr{C} \arrow[u, "\mathrm{Ho}"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \mathscr{D} \end{tikzcd}$$

Definition 4.8 (全導来関手)

$\mathscr{C}, \mathscr{D}$ をモデル圏, $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ を関手, $\mathrm{Ho}\colon \mathscr{C} \to \mathrm{Ho}(\mathscr{C}), \mathrm{Ho}'\colon \mathscr{D} \to \mathrm{Ho}(\mathscr{D})$ を局所化関手とする．このとき, Ho に沿った $\mathrm{Ho}' \circ F$ の右 Kan 拡張を F の全左導来関手といい, Ho に沿った $\mathrm{Ho}' \circ F$ の左 Kan 拡張を F の全右導来関手という．

Adjoint functor

Proposition 4.9

$\mathscr{C}, \widetilde{\mathscr{C}}, \mathscr{D}, \widetilde{\mathscr{D}}$ を圏, $S\colon \mathscr{C} \to \widetilde{\mathscr{C}}, T\colon \mathscr{D} \to \widetilde{\mathscr{D}}$ を関手, $F \dashv G\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ を随伴関手とし, 絶対右 Kan 拡張 $S^{\ddagger}(T \circ F)$ と絶対左 Kan 拡張 $T^{\dagger}(S \circ G)$ が存在するとする. このとき, $S^{\ddagger}(T \circ F) \dashv T^{\dagger}(S \circ G)\colon \widetilde{\mathscr{C}} \to \widetilde{\mathscr{D}}$ となる.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathscr{C}} \arrow[r, shift left, "S^{\ddagger}(T\circ F)"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \widetilde{\mathscr{D}} \arrow[l, shift left, "T^{\dagger}(S\circ G)"] \\
\mathscr{C} \arrow[u, "S"] \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathscr{D} \arrow[u, "T"'] \arrow[l, shift left, "G"]
\end{tikzcd}$$

Homotopy and weak equivalence

Theorem 4.10

$\mathscr{C}, \mathscr{D}$ をモデル圏,$F \dashv G\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ を随伴関手とし, F は $\mathscr{C}$ の cofibrant object の間の weak equivalence を保ち, G は $\mathscr{D}$ の fibrant object の間の weak equivalence を保つとする. このとき, 随伴関手 $\mathrm{Ho}^{\ddagger}(\mathrm{Ho}' \circ F) \dashv \mathrm{Ho}'^{\dagger}(\mathrm{Ho} \circ G)\colon \mathrm{Ho}(\mathscr{C}) \to \mathrm{Ho}(\mathscr{D})$ が存在する.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(\mathscr{C}) \arrow[r, shift left, "\mathrm{Ho}^{\ddagger}(\mathrm{Ho}'\circ F)"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{Ho}(\mathscr{D}) \arrow[l, shift left, "\mathrm{Ho}'^{\dagger}(\mathrm{Ho}\circ G)"] \\
\mathscr{C} \arrow[u, "\mathrm{Ho}"] \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathscr{D} \arrow[u, "\mathrm{Ho}'"'] \arrow[l, shift left, "G"]
\end{tikzcd}
$$

Quillen adjoint

Definition 4.11 (Quillen 随伴)

$\mathscr{C}, \mathscr{D}$ をモデル圏, $F \dashv G \colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ を随伴関手とする. このとき, 以下は同値である.

F が cofibration と trivial cofibration を保つ.

G が fibration と trivial fibration を保つ.

F が cofibration を保ち, G が fibration を保つ.

F が trivial cofibration を保ち, G が trivial fibration を保つ.

これらの条件を満たす随伴 $F \dashv G$ を Quillen 随伴という. また F を左 Quillen 関手といい, G を右 Quillen 関手という.

Theorem 4.12

$\mathscr{C}, \mathscr{D}$ をモデル圏, $F \dashv G \colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ を Quillen 随伴とする. このとき, 随伴関手 $\mathrm{Ho}^{\ddagger}(\mathrm{Ho}' \circ F) \dashv \mathrm{Ho}'^{\dagger}(\mathrm{Ho} \circ G) \colon \mathrm{Ho}(\mathscr{C}) \to \mathrm{Ho}(\mathscr{D})$ が存在する.

Quillen equivalence

Definition 4.13 (Quillen 同値)

$\mathscr{C}, \mathscr{D}$ をモデル圏, $F \dashv G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ を Quillen 随伴とする．このとき, 随伴関手 $\mathrm{Ho}^{\ddagger}(\mathrm{Ho}' \circ F) \dashv \mathrm{Ho}'^{\dagger}(\mathrm{Ho} \circ G) : \mathrm{Ho}(\mathscr{C}) \to \mathrm{Ho}(\mathscr{D})$ が圏同値を与えるとき, $F \dashv G$ を Quillen 同値という．

Quillen は pointed なモデル圏のホモトピー圏において, loop functor, suspension functor, fibration sequence, cofibration sequence, Toda brackets など様々な概念を定義し, Quillen 同値がそれらを保つことを示した．

Quillen はさらに一般のモデル圏のホモロジーを定義した．

Outline

Reference

[alg-d] alg-d. モデル圏，圏論─壱大整域.
http://alg-d.com/math/kan_extension/model.pdf

[BV73] Michael Boardman,Rainer Vogt. Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 347. Springer-Verlag, 1973.

[EZ50] Samuel Eilenberg, Joseph A. Zilber, Section 8 in: Semi-simplicial complexes and singular homology, Annals of Mathematics 51:3 (1950), 499–513 (jstor:1969364)

[GZ67] P. Gabriel and M. Zisman, Calculus of fractions and homotopy theory, Ergeb- nisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 35, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967.

Reference

[Hov99] Mark Hovey. Model categories. Vol. 63. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI: American Mathematical Society, 1999.

[Hov13] Mark Hovey. Quillen model categories. In: J. K-Theory 11.3 (2013), pp. 469–478.

[Kan56] Daniel M. Kan, Abstract homotopy. III, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 42 (1956), 419–421.

[Qui64] Daniel Quillen. Formal properties of over-determined systems of linear partial differential equations. Ph.D. thesis. Harvard University. 1964.

Reference

[Qui67] Daniel G. Quillen. Homotopical algebra. Lecture Notes in Mathematics, No. 43. Berlin: Springer-Verlag, 1967.

[Vel67] Verdier,Jean-Louis. Des Catégories Dérivées des Catégories Abéliennes. Astérisque (in French). Société Mathématique de France, Marseilles. 239.